
3

PEMROGRAMAN LINIER

Pemrograman linier berasal dari kata pemrograman dan linier. Pemrograman disini mempunyai arti kata perencanaan, dan linier ini berarti bahwa fungsi-fungsi yang digunakan merupakan fungsi linier.

Secara umum arti dari pemrograman linier adalah suatu teknik perencanaan yang bersifat analitis yang analisis- analisisnya memakai model matematika, dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif pemecahan masalah; kemudian dipilih yang terbaik diantaranya dalam rangka menyusun strategi dan langkah-langkah kebijaksanaan lebih lanjut tentang alokasi sumber daya dan dana yang terbatas guna mencapai tujuan dan sasaran yang diinginkan secara optimal.

Contoh dari suatu masalah pemrograman linier dapat dilihat pada Contoh masalah (Metoda Grafik).

Untuk merumuskan suatu masalah kedalam bentuk model pemrograman linier, harus dipenuhi syarat-syarat berikut :

1. Tujuan masalah tersebut harus jelas dan tegas.

Pada Contoh Masalah, tujuan masalah tersebut jelas, yaitu ingin mendapatkan keuntungan yang maksimal.

2. Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin membandingkan.

Pada Contoh Masalah, alternatif perbandingannya adalah kombinasi jumlah produksi dan keuntungan yang diperoleh.

3. Adanya sumber daya yang terbatas.

Pada Contoh Masalah, sumber daya yang terbatas adalah waktu untuk subassembly, assembly dan inspeksi.

4. Bisa dilakukan perumusan kuantitatif.

Fungsi tujuan dan kendala harus dapat dirumuskan secara kuantitatif.

5. Adanya keterkaitan peubah.

Adanya hubungan keterkaitan antara peubah-peubah yang membentuk fungsi tujuan dan kendala.

Untuk membentuk suatu model pemrograman linier perlu diterapkan asumsi-asumsi berikut :

1. Linearity

Fungsi obyektif dan kendala haruslah merupakan fungsi linier dan variabel keputusan. Hal ini akan mengakibatkan fungsi bersifat proporsional dan additif, misalnya untuk memproduksi 1 kursi dibutuhkan waktu 5 jam, maka untuk memproduksi 2 kursi dibutuhkan waktu 10 jam.

2. Divisibility

Nilai variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan. Apabila diinginkan solusi berupa bilangan bulat (integer), maka harus digunakan metoda untuk integer programming.

3. Nonnegativity

Nilai variabel keputusan haruslah nonnegatif (≥ 0).

4. Certainty

Semua konstanta (parameter) yaitu C_j , a_{ij} dan b_i diasumsikan mempunyai nilai yang pasti (sudah tertentu). Bila nilai-nilai parameternya probabalistik, maka harus digunakan formulasi pemrograman masalah stokastik.

Walaupun ada beberapa batasan asumsi yang harus ada, namun pemrograman linier ini dapat digunakan untuk memecahkan masalah-masalah pengalokasian sumber daya yang terbatas guna mendapatkan hasil yang optimal.

Beberapa metoda digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier ini. Berikut ini akan dibahas dua metoda yang umum digunakan, yaitu metoda grafik dan metoda simpleks.

A. METODA GRAFIK

Tujuan dari metoda grafik ini adalah untuk memberikan dasar-dasar dari konsep yang digunakan dalam teknik SIMPLEKS. Prosedur umumnya adalah untuk mengubah suatu situasi deskriptif kedalam bentuk masalah pemrograman linier dengan menentukan variabelnya-variabelnya, konstanta-konstantanya, fungsi obyektifnya dan batas-batasannya (kendala-kendala), sehingga masalah tersebut dapat disajikan dalam bentuk grafik dan diinterpretasikan solusinya. Untuk menggunakan metoda grafik, dilalui tahapan-tahapan berikut :

-
1. Identifikasi variabel keputusan
 2. Identifikasi fungsi obyektif
 3. Identifikasi kendala-kendala
 4. Menggambarkan bentuk grafik dari semua kendala
 5. Identifikasi daerah solusi yang layak pada grafik
 6. Menggambarkan bentuk grafik dari fungsi obyektif dan menentukan titik yang memberikan nilai obyektif optimal pada daerah solusi yang layak.
 7. Mengartikan solusi yang diperoleh

CONTOH MASALAH

MultiBand Enterprises adalah suatu perusahaan yang memproduksi dua macam produk, yaitu radio portabel (PR) dan radio citizen band (CB). Manajer pemasaran menyatakan bahwa perusahaan selalu dapat menjual semua produk dihasilkan. Selanjutnya Sang manajer pemasaran ini bertanya kemanajer operasi tentang besarnya kapasitas produksi/bulan. Manajer operasi menyatakan bahwa kapasitas output tergantung produk mana yang diproduksi. Selanjutnya manajer operasi menyatakan bahwa ada 3 jenis pekerjaan dilakukan dalam pembuatan produk radio tersebut, yaitu subassembly, assembly dan inspeksi. Kedua produk tersebut membutuhkan waktu pengerjaan yang berbeda untuk setiap jenis pekerjaan tadi. Jadi kapasitas produksinya tergantung pada produk mana yang akan diproduksi.

Waktu yang tersedia untuk pekerjaan subassembly setiap bulannya adalah 326 jam, untuk assembly adalah 354 jam dan untuk inspeksi adalah 62 jam. Sedangkan setiap unit radio CB membutuhkan 0.4 jam untuk pekerjaan subassembly, 0.5 jam untuk assembly dan 0.05 jam untuk inspeksi. Radio portabel untuk setiap unitnya membutuhkan waktu 0.5 jam untuk pekerjaan subassembly, 0.3 jam untuk assembly dan 0.1 jam inspeksi. Wakil direktur menyatakan bahwa untuk setiap CB yang terjual diperoleh keuntungan sebesar \$50 dan untuk setiap PR didapat \$40. Jadi beberapa kapasitas output dari MultiBand setiap bulannya (beberapa Cb dan PR yang harus diproduksi) agar keuntungan yang diperoleh sebesar mungkin ?

LANGKAH PERTAMA

Identifikasi Variabel keputusan

Pada contoh masalah tersebut terlihat ada dua variabel keputusan yaitu radio CB dan Radio PR. Masalahnya adalah untuk menentukan berapa CB. dan PR yang harus diproduksi.

LANGKAH KEDUA

Identifikasi Fungsi Obyektif

Setiap CB memberikan kontribusi keuntungan \$50 dan setiap PR memberikan kontribusi keuntungan \$40. Jadi total keuntungan MultiBand sebesar

$$(\$50) (CB) + (\$40) (PR).$$

Pada fungsi obyektif terlihat bahwa total keuntungan yang diperoleh tergantung pada jumlah CB dan PR yang diproduksi. MultiBand menginginkan keuntungan yang sebesar mungkin; yang berarti MultiBand ingin memaksimalkan keuntungan.

LANGKAH KETIGA

Identifikasi Sumber Daya yang Terbatas

Untuk memproduksi radio, MultiBand membutuhkan tiga jenis pekerjaan yang harus dilakukan yaitu subassembly, assembly dan inspeksi. Jumlah waktu yang tersedia untuk melakukan ketiga jenis pekerjaan tersebut adalah 316 jam untuk subassembly, 354 jam untuk assembly dan 62 jam untuk inspeksi. Produksi sebuah CB membutuhkan 0.4 jam pekerjaan membutuhkan waktu subassembly 0.5 jam, assembly 0.3 jam dan inspeksi 0.1 jam. Jadi, ada tiga jenis sumber daya yang terbatas, dan jumlah CB dan PR yang dapat diproduksi dibatasi oleh ketersediaan jumlah ketiga jenis sumber daya tersebut.

Keterbatasan ketiga sumber daya tersebut di atas dapat diekspresikan ke dalam bentuk pertidaksamaan berikut :

Sumber daya	Konsumsi sb. daya		Ketersediaan
Subassembly	$0.4CB + 0.5PR$	\leq	316
Assembly	$0.5CB + 0.3PR$	\leq	354
Inspeksi	$0.05CB + 0.1PR$	\leq	62

LANGKAH KEEMPAT

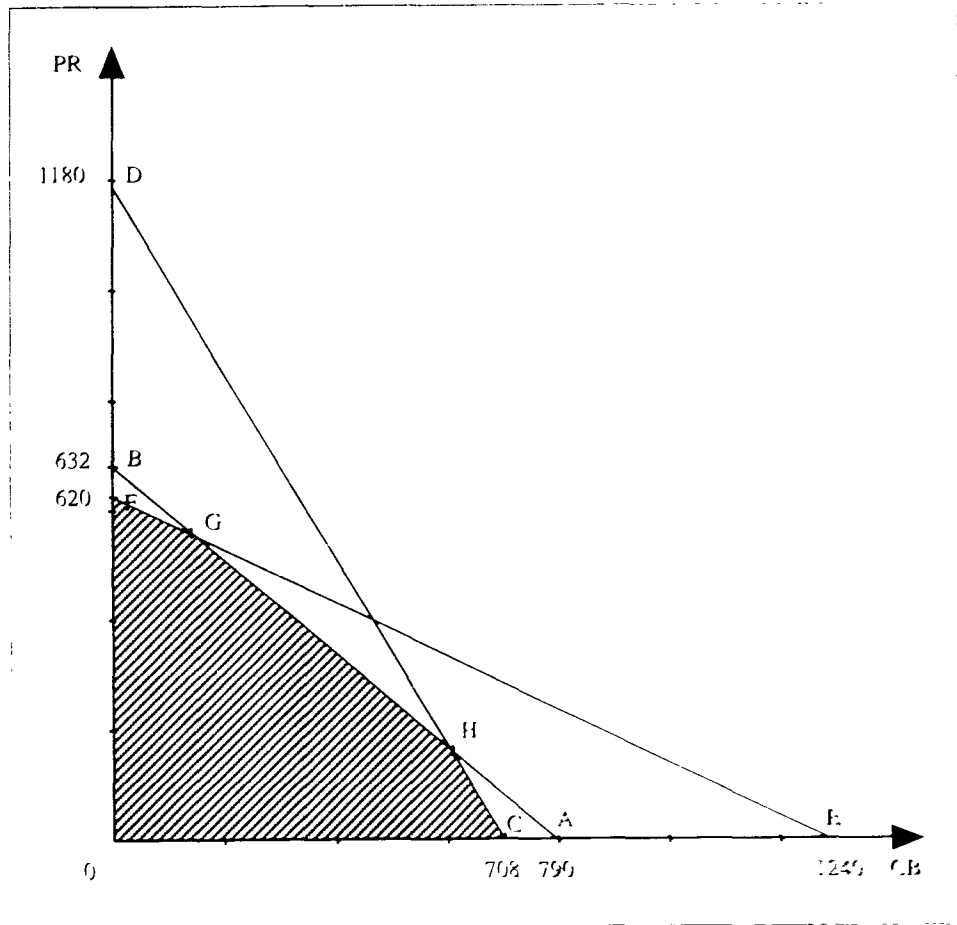
Membuat Grafik dari Semua Batasan (Kendala)

Sumbu-sumbu yang digunakan untuk menggambarkan grafik adalah garis yang mewakili variabel keputusan yang ingin dicari nilainya. Untuk grafik yang kita buat, sumbu horisontal menunjukkan jumlah CB yang dapat diproduksi dan sumbu vertikal menunjukkan jumlah PR yang dapat diproduksi. Daerah solusinya adalah titik-titik pada atau di sebelah kanan sumbu vertikal dan titik-titik pada atau di atas sumbu horizontal, karena nilai negatif untuk PR dan CB tidak memberikan arti. Setiap titik pada daerah solusi mewakili kombinasi jumlah PR dan CB yang diproduksi.

Pertama, dibuat gambar garis untuk kendala subassembly. Bila sejumlah 316 jam pekerjaan subassembly digunakan untuk memproduksi CB, berapa jumlah CB yang dapat diproduksi? Karena setiap CB membutuhkan 0.4 jam pekerjaan subassembly, maka dalam waktu 316 jam akan dihasilkan CB sejumlah $316 : 0.4 = 790$ unit. Kombinasi produksi CB 790 unit dan PR 0 unit ini diplotkan sebagai titik A pada grafik. Alternatif lainnya adalah menggunakan seluruh jam tersebut untuk memproduksi PR. Untuk kasus ini, maka akan dapat diproduksi PR sejumlah $316 : 0.5 = 632$ unit. Kombinasi produksi 632 unit PR dan 0 unit CB ini diplotkan sebagai titik B pada grafik. Disebabkan semua batasan tersebut berbentuk pertidaksamaan linier, maka grafik dapat digambarkan sebagai garis yang menghubungkan titik A dan B. Setiap titik pada batasan ini menyajikan kombinasi jumlah CB dan PR yang diproduksi, dan setiap kombinasi tersebut mengkonsumsi semua waktu untuk pekerjaan subassembly yang tersedia. Titik-titik yang berada di atas atau di sebelah kanan garis AB adalah kombinasi tak layak dari CB dan PR, karena dibutuhkan lebih dari 316 jam subassembly untuk memproduksinya.

Dengan cara yang sama dapat digambarkan garis-garis yang lain untuk kedua sumber daya yang terbatas lainnya, yaitu assembly dan inspeksi.

Pada Gambar 3.1., garis CD adalah garis untuk sumber daya assembly dan garis EF adalah garis untuk sumber daya inspeksi.



Gambar 3.1.

LANGKAH KELIMA

Identifikasi Daerah Solusi yang Layak

Dalam memutuskan berapa jumlah PR dan CD yang dapat diproduksi, pihak manajemen tidak dapat hanya menggunakan 1 atau 2 sumber daya yang terbatas saja sebagai bahan pertimbangan, tetapi harus semuanya. Titik-titik yang merupakan titik-titik yang layak yang memenuhi semua keterbatasan sumber daya tersebut berada di daerah bergaris pada Gambar 3.1. Daerah yang layak ini dikelilingi oleh titik-titik pojok (titik ekstrim) O,F,G,H,C.

LANGKAH KEENAM

Membuat Grafik Fungsi Obyektif dan Menentukan Titik Optimal

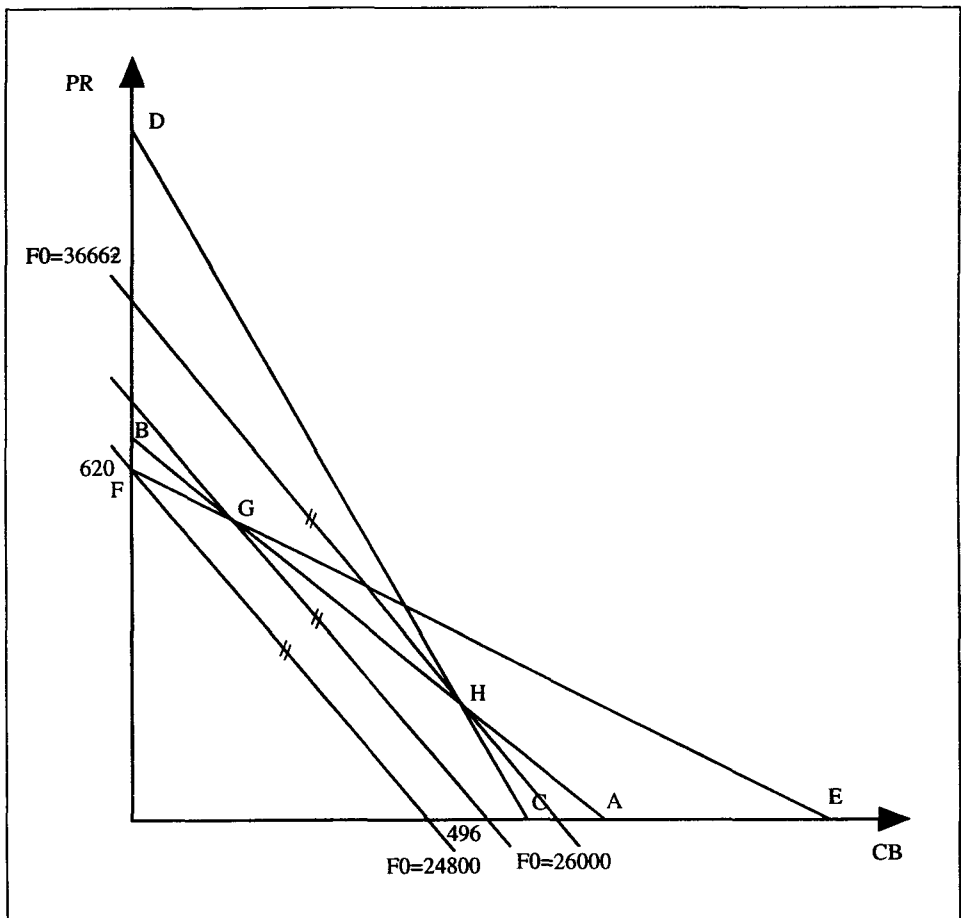
Walaupun semua titik pada daerah bergaris adalah alternatif keputusan yang layak, titik-titik tersebut tidak memberikan total nilai keuntungan yang sama. Beberapa memberikan total nilai keuntungan yang lebih besar dari yang lainnya. Sebagai contoh, pada titik C (708 unit CB dan 0 unit PR) didapatkan total nilai keuntungan sebesar : $(\$50)(708) + (\$40)(0) = \$35400$.

Sedangkan sejumlah 300 unit CB dan 300 unit PR, yang juga merupakan salah satu alternatif solusi yang layak, hanya memberikan total nilai keuntungan sebesar: $(\$50)(300) + (\$40)(300) = \$27000$. Jadi, harus dipilih suatu titik yang memberikan nilai keuntungan terbaik (maksimum) di antara titik-titik pada daerah yang layak tersebut. Tugas ini dapat lebih disederhanakan, karena *titik optimal yang dimaksud adalah salah satu dari titik pojok pada daerah layak*. Jadi salah satu dari titik-titik O,F,G,H atau C adalah titik optimal. Kita dapat menghitung total nilai keuntungan untuk setiap titik dari kelima titik tadi dan memilih satu titik yang memberikan nilai tertinggi.

Prosedur penentuan lainnya yang juga dapat digunakan adalah prosedur grafis. Untuk menggunakan prosedur grafis ini perlu ditambahkan satu garis lagi pada grafik tersebut yang merupakan garis yang menunjukkan suatu nilai keuntungan tertentu dari persamaan fungsi obyektif. Pertama, ditentukan terlebih dahulu sembarang nilai total keuntungan (sebaiknya yang menghasilkan nilai variabel keputusan bulat). Lalu digambarkan garis persamaannya dengan cara yang sama seperti penggambaran garis untuk kendala (batasan). Sebaiknya garis yang digambarkan adalah garis fungsi obyektif yang melalui titik pojok daerah

layak, dimulai dari titik pojok yang paling kiri. Demikian seterusnya hingga didapat suatu garis yang melalui titik pojok yang memberikan total nilai keuntungan terbesar. Titik pojok yang dilalui oleh garis tersebut adalah titik yang optimal

Pada Gambar 3.2. titik optimalnya adalah titik H.



Gambar 3.2.

LANGKAH KETUJUH

Mengartikan Hasil yang Diperoleh

Hasil dari langkah keenam di atas adalah diperoleh titik optimal yaitu titik H. Koordinat titik tersebut adalah (632.31,126.15); dimana pada grafik tersebut sumbu horizontal menunjukkan jumlah CB dan sumbu vertikal menunjukkan jumlah PR. Jadi agar keuntungan yang diperoleh maksimal, dan karena dibatasi oleh kendala-kendala yang ada, maka MultiBand harus memproduksi radio CB sejumlah 632.31 unit dan radio PR sejumlah 126.15 unit.

Hal lain yang dapat diketahui berdasarkan hasil penyelesaian dengan metoda grafik tersebut adalah tentang ada tidaknya sejumlah tertentu sumber daya yang tidak dipergunakan dalam produksi untuk memperoleh keuntungan maksimal. Pada Gambar 3.2. terlihat bahwa titik optimal terletak pada garis kendala subassembly dan assembly. Hal ini berarti bahwa kedua sumber daya tersebut habis digunakan, karena garis tersebut menunjukkan jumlah maksimum kedua sumber daya yang tersedia. Sekarang coba dilihat letak titik optimal terhadap garis kendala inspeksi. Ternyata titik optimal terletak di sebelah kiri-bawah garis inspeksi. Hal ini berarti ada sejumlah tertentu sumber daya ini yang tidak dipergunakan dalam produksi untuk memperoleh keuntungan maksimal.

Secara aljabar hal-hal tersebut juga dapat diketahui dan juga berapa jumlah sumber daya yang tersisa, dengan cara sebagai berikut :

* Inspeksi			
Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	- Sumber daya yang digunakan
	=	62.0 jam	- [(0.05 jam/PR) (632.31 CB) + (0.10 jam/PR) (126.15 PR)]
	=	62.0	- [31.62 + 12.62]
	=	17.76 jam	
* Subassembly			
Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	- Sumber daya yang digunakan

$$\begin{aligned}
&= 316.0 \text{ jam} && - [(0.4 \text{ jam/CB}) \\
& && (632.31 \text{ CB}) + \\
& && (0.5 \text{ jam/PR}) \\
& && (126.15 \text{ PR})] \\
&= 316.0 && - [252.92 + 63.08] \\
&= 0.0 \text{ jam}
\end{aligned}$$

* Assembly

Sumber daya yang tidak digunakan	=	Sumber daya yang tersedia	-	Sumber daya yang digunakan
	=	354.0 jam	-	[(0.5 jam/CB) (632.31 CB) (0.30 jam/PR) (126.15 PR)]
	=	354.0	-	[316.16 + 37.84]
	=	0.0 jam		

Jadi, dengan menggunakan metoda grafik dapat ditentukan arti dari koefisien-koefisien dan variabel-variabel yang berbeda, dan bagaimana hubungan interaksi antara fungsi obyektif dan kendala. Dan perlu pula diingat bahwa solusi optimal selalu merupakan suatu titik ekstrim dalam solusi layak.

B. METODA SIMPLEKS

Pada bagian terdahulu telah kita pelajari penyelesaian suatu masalah pemrograman linier dengan menggunakan metoda grafik. Metoda grafik tersebut hanya dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier yang hanya mempunyai 2 variabel, karena untuk pemrograman linier dengan variabel lebih dari 2 akan sulit untuk menggambarkan bentuk grafiknya. Untuk mengatasi kesulitan ini, maka pada tahun 1947 diperkenalkan suatu metoda yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah pemrograman linier oleh Goerge B. Dantzig yang dinamakan Metoda SIMPLEKS.

Algoritma simpleks ini adalah suatu prosedur matematis untuk mencari solusi optimal dari suatu masalah pemrograman linier yang didasarkan pada proses iterasi. Jadi pada prinsipnya prosedur ini diawali dengan penentuan suatu solusi awal yang secara terus-menerus diperbaiki hingga diperoleh solusi yang optimal.